

電子-陽電子系の内部parityの測定

栗本 佳典

中井 祐介

平田 朋義

福原 武

弓削 達郎

Introduction

P.A.M.Diracは今からちょうど百年前に生まれ、物理学に数々の業績を残した。その中でも最も大きな仕事のひとつに相対論的量子力学および場の量子論（以下これらをDirac理論と呼ぶ）の基礎を築いたことが挙げられるだろう。かの美しいDirac理論は次のような予言をしている：“反Fermi粒子の内部parityは元の粒子のものと逆符号になる、”あるいは、“Fermi粒子-反Fermi粒子系の内部parityは -1 となる。”[1](#)

我々の実験の目的は電子-陽電子の結合系であるpositroniumの崩壊を利用して電子-陽電子系の内部parityを測定し、それが -1 となっていることを実験的に確かめること、そしてそれによって量子論の世界を垣間見るとともにDirac理論の妥当性を確認することである。

Diracの生誕百周年という記念すべき年に彼の偉大さを改めて知り、また彼の理論の検証実験ができることに我々は誇りと喜びを感じずにはいられない。

Theory

Dirac理論によると、Fermi粒子のひとつである電子とその反粒子である陽電子の内部parityの積は -1 となる。従って電子と陽電子の結合系であるpositroniumのparityは $P = (-1)^{L+1}$ となる（ただし、 L は軌道角運動量）。特に基底状態では $L = 0$ なので $P = -1$ となる。

positroniumの基底状態は二種類あって、singletであるpara-positroniumとtripletであるortho-positroniumが存在するが、C-parityの選択則により、para-positroniumは2個の光子に、ortho-positroniumは3個の光子に

それぞれ崩壊する。² また、詳しい摂動計算によればpara-positroniumの方が速く崩壊することがわかる（para-positroniumの寿命は 1.25×10^{-10} sec、ortho-positroniumの寿命は 1.4×10^{-7} secである）。我々はpara-positroniumの 2γ 崩壊を利用して電子-陽電子系の内部parityを測定する。

二光子系の波動関数は次のどちらかで表わされることが知られている：

$$\begin{aligned}\Psi &= a(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \\ \Psi &= b(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{k}\end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ はそれぞれの光子の偏極ベクトル（電場方向）、 $\mathbf{k}$ は重心系での光子の運動量ベクトル（あるいは伝播ベクトル）、 a 、 b は定数である。(2.1)の場合は波動関数はscalarなのでparityは $P = 1$ 、(2.2)の場合は波動関数はpseudoscalarなのでparityは $P = -1$ となる。一方、基底状態にあるpara-positroniumのparityは先に見たように $P = -1$ だから、parityの保存則を認めるならば、この二光子系のparityも $P = -1$ となり、その波動関数として(2.2)が選択される。従って、 ϕ を $\mathbf{e}_1$ と $\mathbf{e}_2$ のなす角とすると

$$|\Psi|^2 \propto |\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2|^2 \propto \sin^2 \phi$$

となるから、 $\mathbf{e}_1$ と $\mathbf{e}_2$ は直交する確率が最も高い。このことを実験的に確かめればよいわけだが、我々はCompton散乱を利用してこれら2個の光子の偏極方向を測定する。

Compton散乱では入射光子の偏極方向と散乱面が直交する確率が高い。このことは次のように考えることができる：衝突の標的となっている電子は入射光子の電場方向（偏極方向）に強制振動する。そしてこの振動によって輻射が起こるが、この輻射は電気双極子輻射が支配的になるから、古典電磁気学によればこの輻射パワーは電子の振動方向（入射光子の偏極方向）と垂直な平面で最大になる。より正確に考えるには相対論的量子力学によるCompton散乱の散乱断面積³を用いればよい：

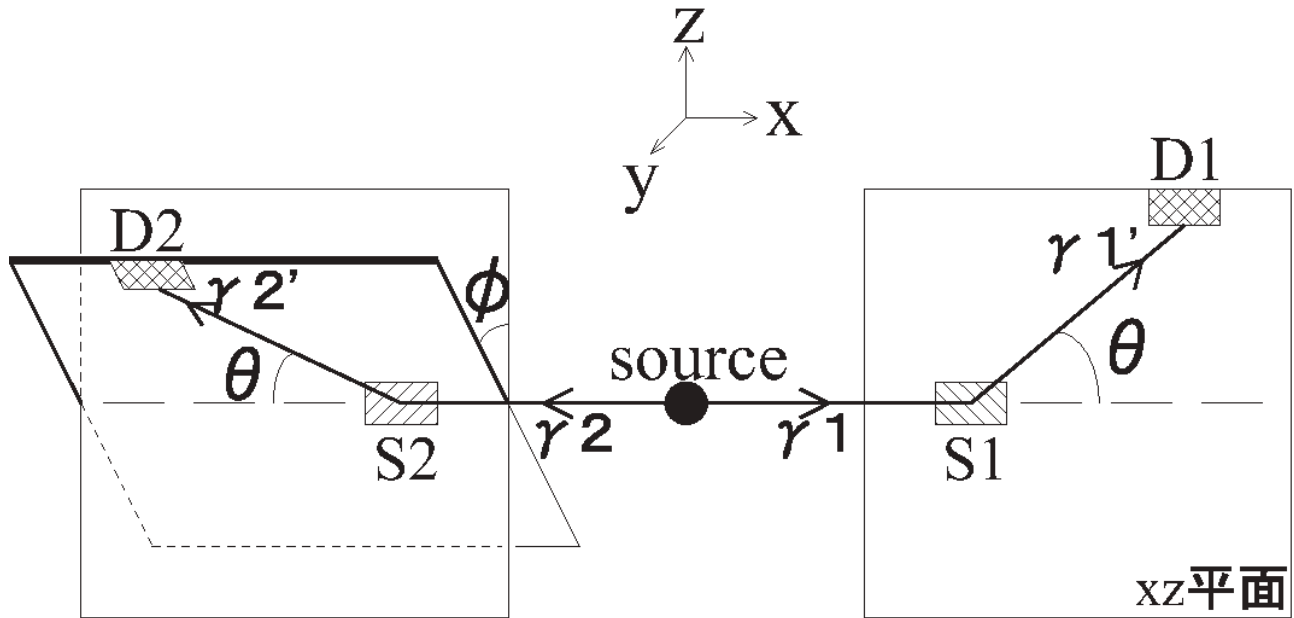
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_e^2 \left(\frac{k}{k_0} \right)^2 \left(\frac{k_0}{k} + \frac{k}{k_0} - 2 + 4 \cos^2 \Theta \right)$$

ここで r_e は古典電子半径、 k_0 および k はそれぞれ入射光子および散乱光子の波数、 Θ は入射光子の偏極ベクトル $\mathbf{e}$ と散乱光子の偏極ベクトル $\mathbf{e}'$ のなす角である。これを散乱光子の偏極方向について平均すると

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\psi, \theta) = \frac{1}{2} r_e^2 \left(\frac{k}{k_0} \right)^2 \left(\frac{k_0}{k} + \frac{k}{k_0} - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi \right)$$

となる。⁴ ここで θ は入射光子の伝播ベクトル $\mathbf{k}$ と散乱光子の伝播ベクトル $\mathbf{k}'$ のなす角、 ψ は入射光子の偏極ベクトル $\mathbf{e}$ と散乱面のなす角である。(2.5)から分かるように $\cos \psi = 0$ 、つまり $\psi = \pi/2$ のとき断面積は最大になる。従って、入射光子の偏極方向と垂直な平面が散乱面となる確率が最も高い。

以上のことから実験は図2.1に与えられた原理図のようになる。



実験の原理図

sourceの近傍でpositroniumが崩壊して作られた2個の光子は運動量保存則により同一直線上を互いに逆向きに運動するが、これらの光子を散乱体 $S1$ 、 $S2$ でCompton散乱させる。入射光子 $\gamma1$ 、 $\gamma2$ の系の波動関数は(2.2)になる、つまり $\gamma1$ と $\gamma2$ の偏極方向は互いに直交するので、散乱光子 $\gamma1'$ 、 $\gamma2'$ は互いに直交した平面内にある確率が高くなる。 $\gamma1'$ と $\gamma2'$ の散乱面のなす角を ϕ としたとき、光検出器 $D1$ 、 $D2$ に散乱光子が同時に入るevent (coincidence)の数を $N(\phi, \theta)$ とすると(θ はCompton散乱の散乱角)、次の量 ρ が

$$\rho(\phi, \theta) = \frac{N(\phi, \theta)}{N(\phi = 0, \theta)}$$

と定義できる。相対論的量子力学を用いた詳しい計算によると、これは

$$\rho(\phi, \theta) = 1 + \frac{(1 - \cos 2\phi) \sin^4 \theta}{\gamma^2 - 2\gamma \sin^2 \theta}$$

となる。ただし

$$\gamma = 2 - \cos \theta + \frac{1}{2 - \cos \theta}$$

である。⁵

我々は $\theta = \pi/2$ において実験を行った。従って ρ は

$$\rho(\phi) = \frac{1}{5}(9 - 4 \cos 2\phi)$$

という曲線を描く。特に、 $\phi = \pi/2$ においては

$$\rho(\phi = \frac{\pi}{2}) = \frac{13}{5}$$

となる。

Dirac理論とは異なり、電子-陽電子系の内部parityが+1であると仮定すると、入射光子 γ_1 、 γ_2 の系の波動関数として(2.1)が選択され、 γ_1 と γ_2 の偏極方向は平行になるので、先ほどと同じように ρ を定義すると

$$\rho(\phi, \theta) = 1 + \frac{(\cos 2\phi - 1) \sin^4 \theta}{(\gamma - \sin^2 \theta)^2 + \sin^4 \theta}$$

となる。 $\theta = \pi/2$ では、これは

$$\rho(\phi) = \frac{1}{13}(9 + 4 \cos 2\phi)$$

という曲線を描く。特に、 $\phi = \pi/2$ においては

$$\rho(\phi = \frac{\pi}{2}) = \frac{5}{13}$$

となる。

上述の議論は純粋に $\theta = \pi/2$ のみで考えたが、実際には立体角等の補正を加えてやる必要がある。⁶ そのため、 $\rho(\phi)$ の関数中の因子や $\rho(\phi = \pi/2)$ の値は上述のものとは若干異なってくるが、 $\rho(\phi)$ の関数形は

$$\rho(\phi) = a - b \cos 2\phi$$

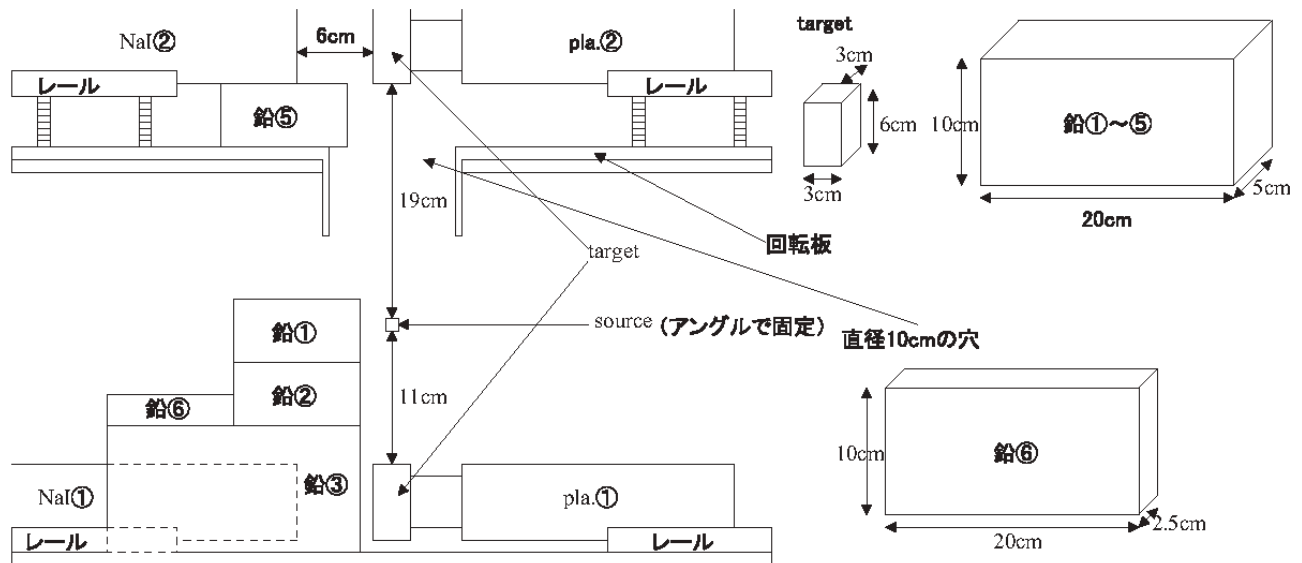
となり、Dirac理論を支持するならば $b > 0$ 、そうでないならば $b < 0$ となるはずである。特に、 $\rho(\phi = \pi/2)$ の値はDirac理論を支持するならば $\rho(\phi = \pi/2) > 1$ となり、そうでないならば $\rho(\phi = \pi/2) < 1$ となる。

結局、我々が実験で直接測定するのは N である。我々は ϕ についていくつかの角度でデータを取り、 ρ を計算した結果がDirac理論での予想と一致するかを調べることになる。

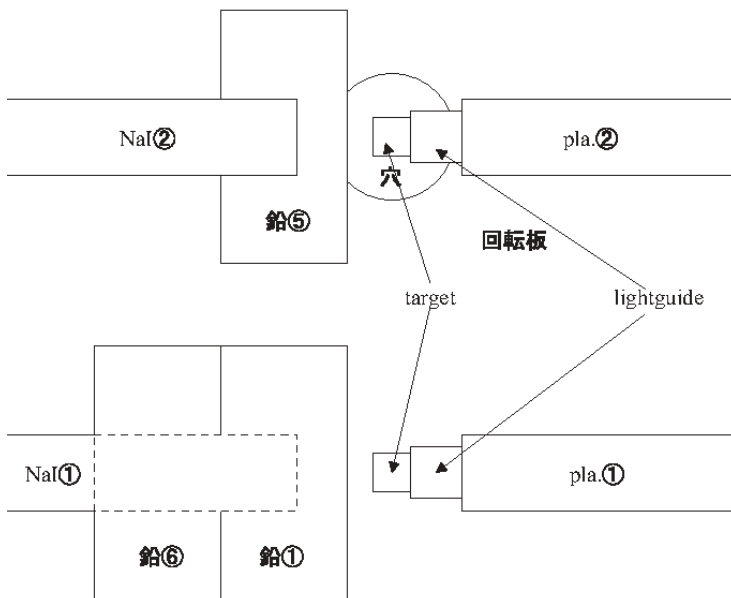
Setup

実験の方法

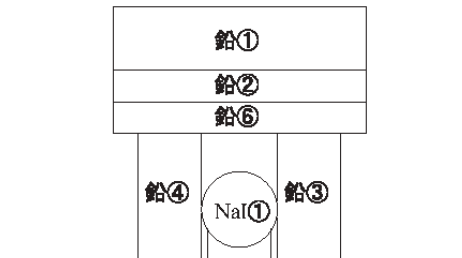
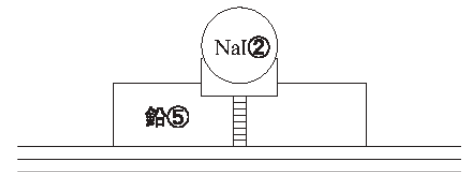
我々の実験ではpositronium生成に ^{22}Na からの陽電子を用いる。Compton散乱体には、 $3\text{cm} \times 3\text{cm} \times 6\text{cm}$ plastic・scintillatorを”Active target”として用いる。散乱光を検出する光検出器としてはNaI結晶を使う。読み出しには光電増倍管を用いる。光電増倍管にlightguideでtargetを接着した検出器を二つ作成し、それらとNaI検出器二つを用いて図3.1のようにsetupを組んだ。以後、下のNaI検出器とplastic検出器をそれぞれNaI①、pla①、上のそれも同様にNaI②、pla②と呼ぶことにする。また回路図は図3.2に示したとおりである。



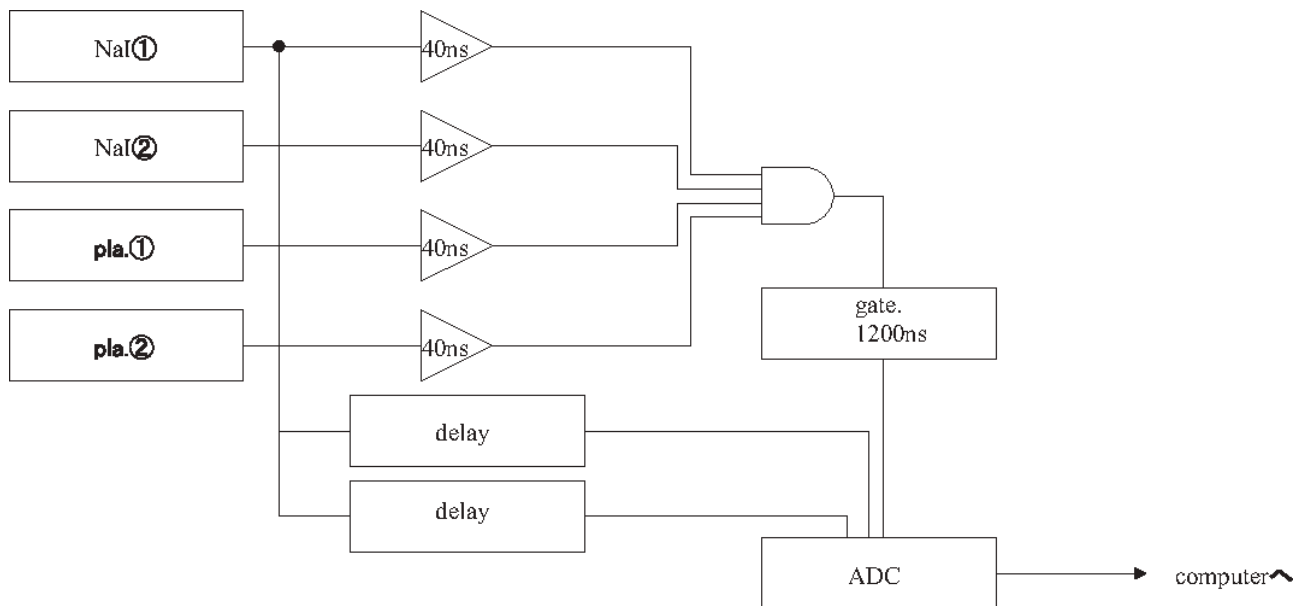
真横から見た図(1)



回転板の真上から見た図(上)と回転板を取り除いて真上から見た図(下)



真横から見た図(2)

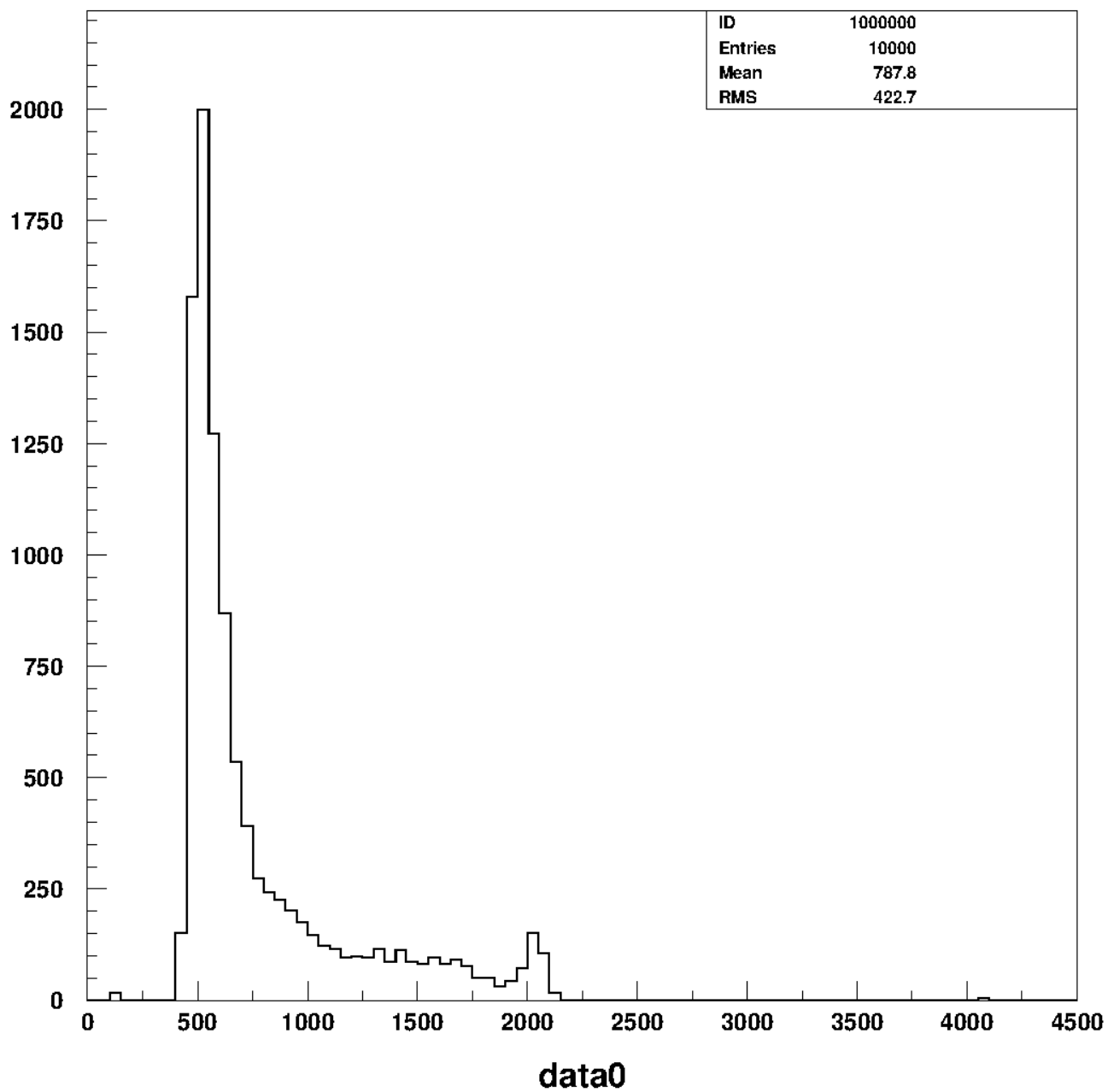


discriminator, coincidence, gate generator は NIM モジュール、ADC は CAMAC.

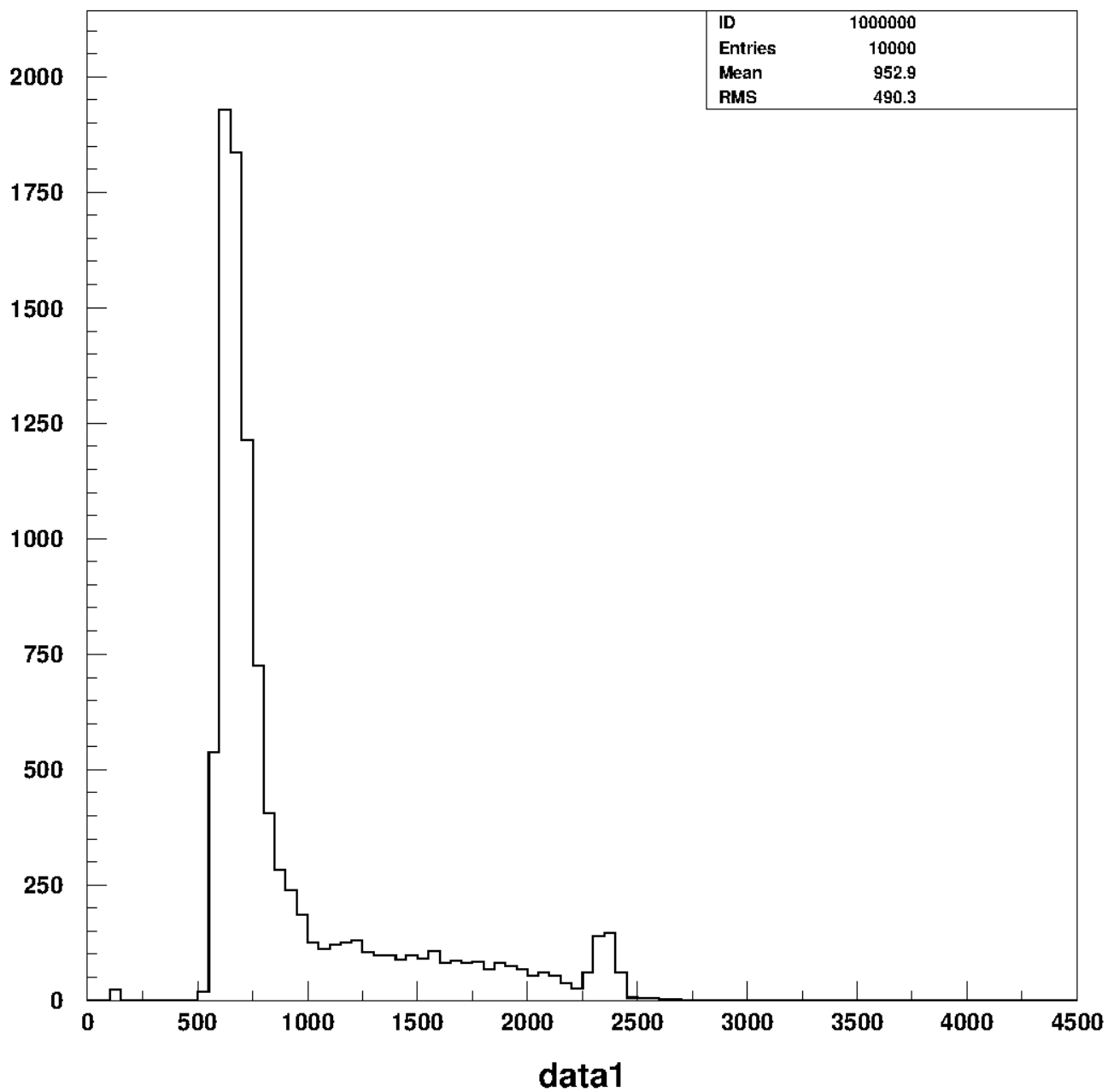
回路図

discriminator の width は 40ns、threshold はエネルギーに換算すると NaI① は約 118keV、NaI② は約 162keV 相当であった。gate generator の width は 1200ns に設定した。HV に関しては NaI① に対して +1400V、pla.① に対しては -1300V の電圧をかけた。図では略してあるが source は銅板ではさみ、アングルで作った台に乗せ安定させた。

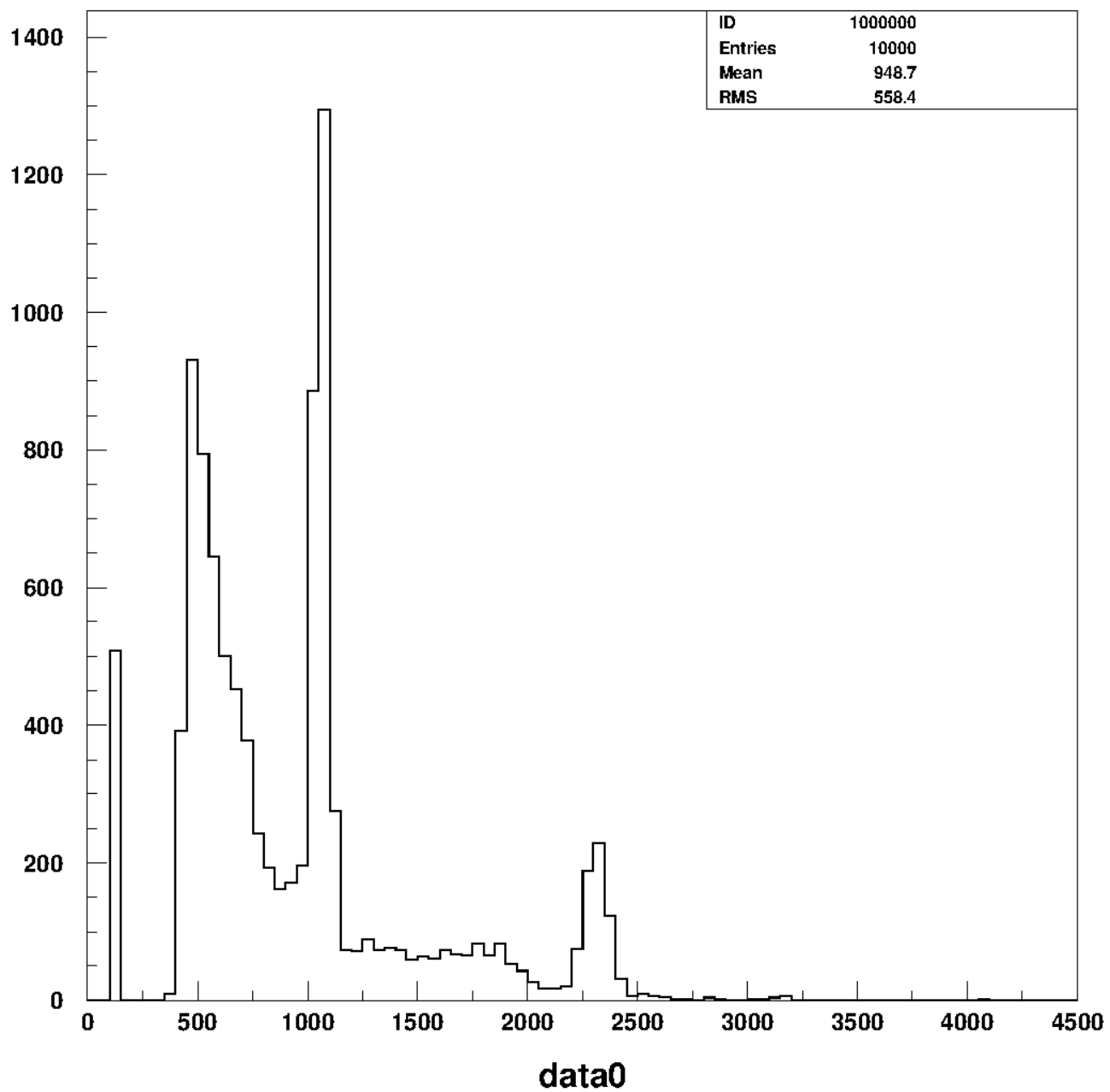
ソースから出た back-to-back の二つの γ 線は上下にある散乱体により散乱される。その散乱光を NaI 検出器で検出する。上の検出器を回転板により回転させ二つの散乱面のなす角度が $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ の場合をそれぞれ測定した。その際回路図を見てもわかるように NaI 検出器二つ、plastic・scintillator 二つの計四つで coincidence をとった。source から上下の散乱体までの距離の差が 8cm (光で 0.26ns) あるのが気になるところだが、discriminator の width を 40ns にしたので前後 40ns までの時間差は同時とみなしてよい。鉛は主に back-to-back で崩壊した二つの γ 線の一部が散乱体にあたらないで直接 NaI 検出器に入るのを防ぐように配置してある。そのため、それぞれの NaI 検出器のスペクトルを見て 511keV のピークがなくなった時、上のようにして検出器に入ってくる γ 線はないとした。また、source を厚さ 2mm、10cm×7.5cm の銅板で挟む事により positronium の生成が source 付近で起こるようにした。図 3.3～3.6 に我々の用いた setup 上での二つの NaI 検出器のスペクトルと setup から鉛と銅板を取り除いた状態でのそれを示す。



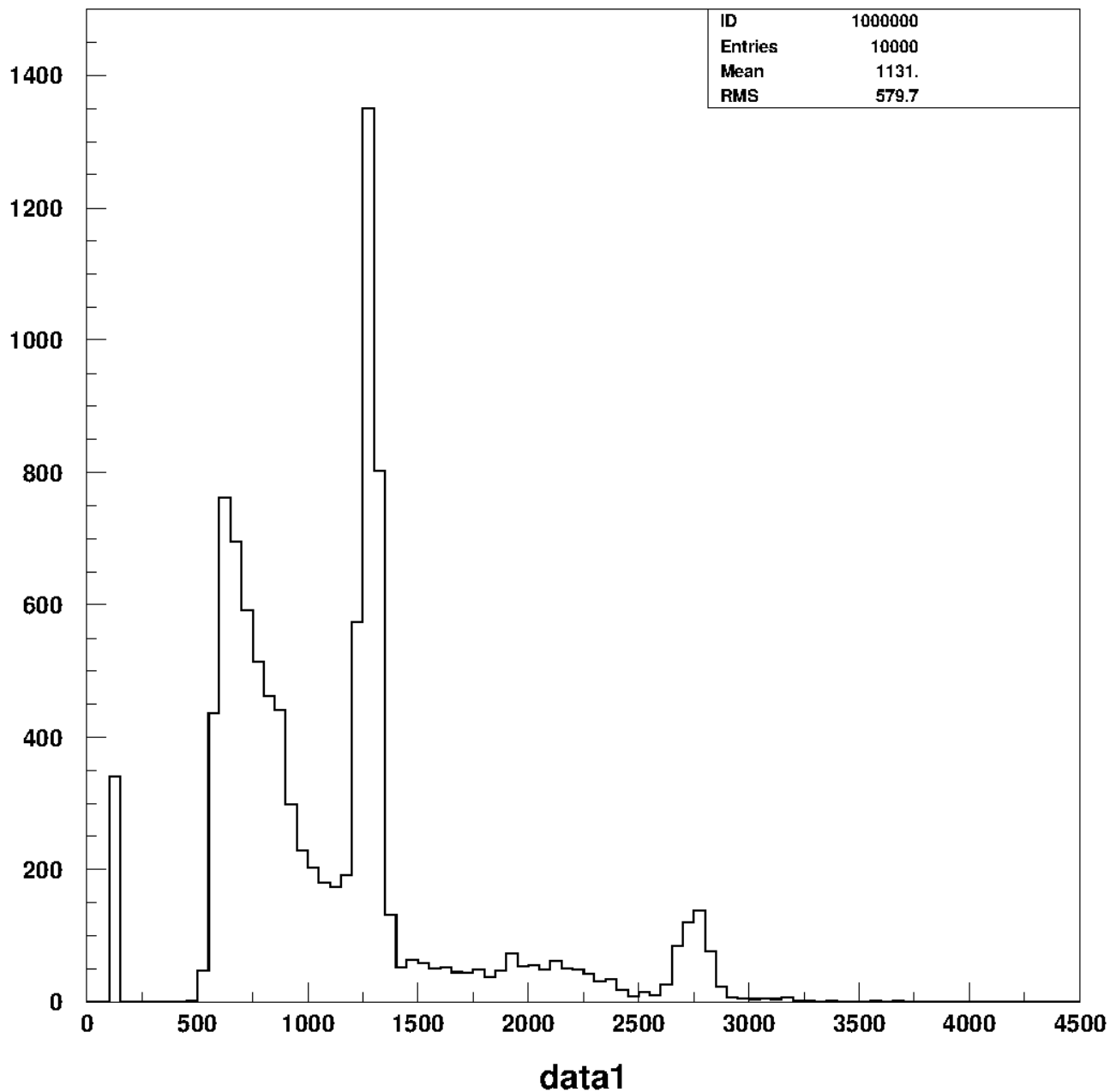
setup上Na①のスペクトル



setup上Na②のスペクトル



鉛と銅板がない時のNaI①のスペクトル



鉛と銅板がない時のNaI②のスペクトル

寸法の誤差

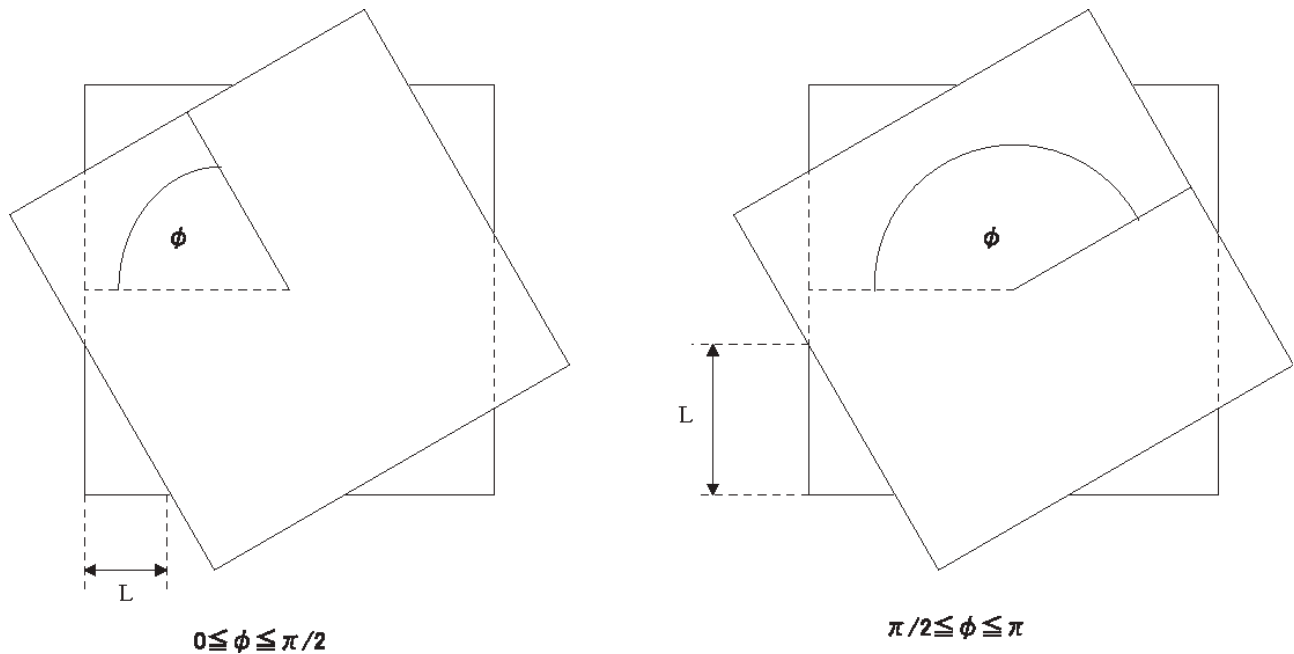
我々は図3.1に示した寸法に対して誤差3mm以内になるようにsetupを組んだ。そのずれは主にtargetの形のずれからくるものである。また我々は回転角を決める際 図3.7のLの長さを使った。まず測定する回転角にたいするLの値を求めペンで書き込み、それを角度をはかる目盛りとした。したがって角度の誤差はLの誤差に起因する。簡単な計算によりL(cm)は回転角 ϕ を使って

$$L = 30(\cot \phi - 1/\sin \phi + 1) \quad (0 \leq \phi \leq \pi/2)$$

と書ける。我々が知りたいのはLの微小なずれに対する ϕ のずれなのでLを ϕ で微分すると

$$\frac{\Delta L}{\Delta \phi} = -\frac{30}{1 + \cos \phi}$$

となる。 ΔL として目盛りの太さ0.05cmを代入し各 ϕ ごとにずれを計算すると表3.1のようになる。($\pi/2 \leq \phi \leq \pi$ の時は図3.7より明らかなように上の式で ϕ を $\pi - \phi$ と取り直せばよい。また0°、90°、180°は回転板と台がぴったり重なる時なので誤差は他の角度に比べて無視できる程小さい。)



Lと ϕ の位置関係

角度の誤差

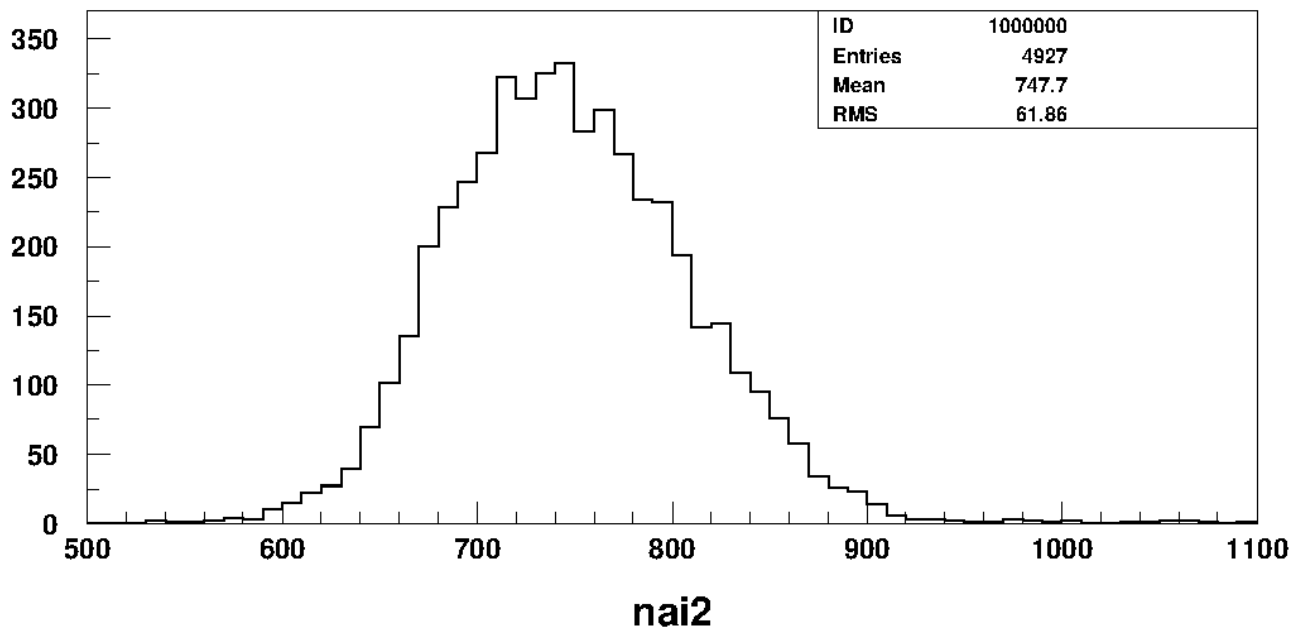
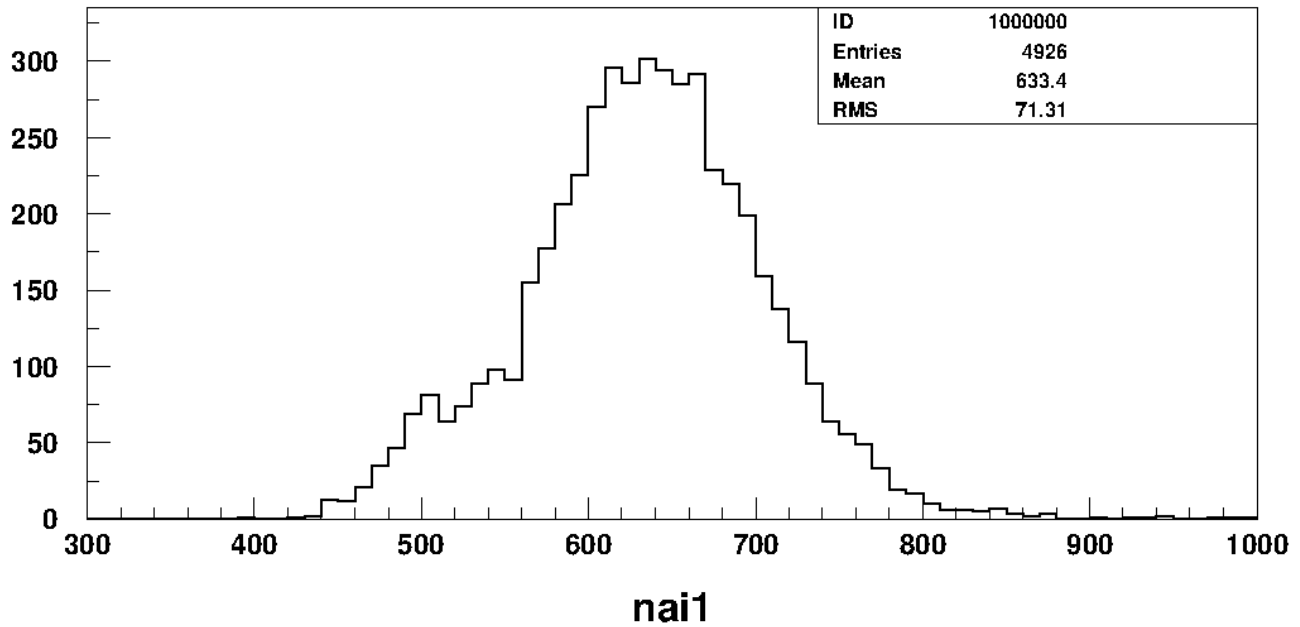
角度（度）	角度の測定誤差（度）
0	-
30	0.18
60	0.14
90	-
120	0.14
150	0.18
180	-

Data and Analysis

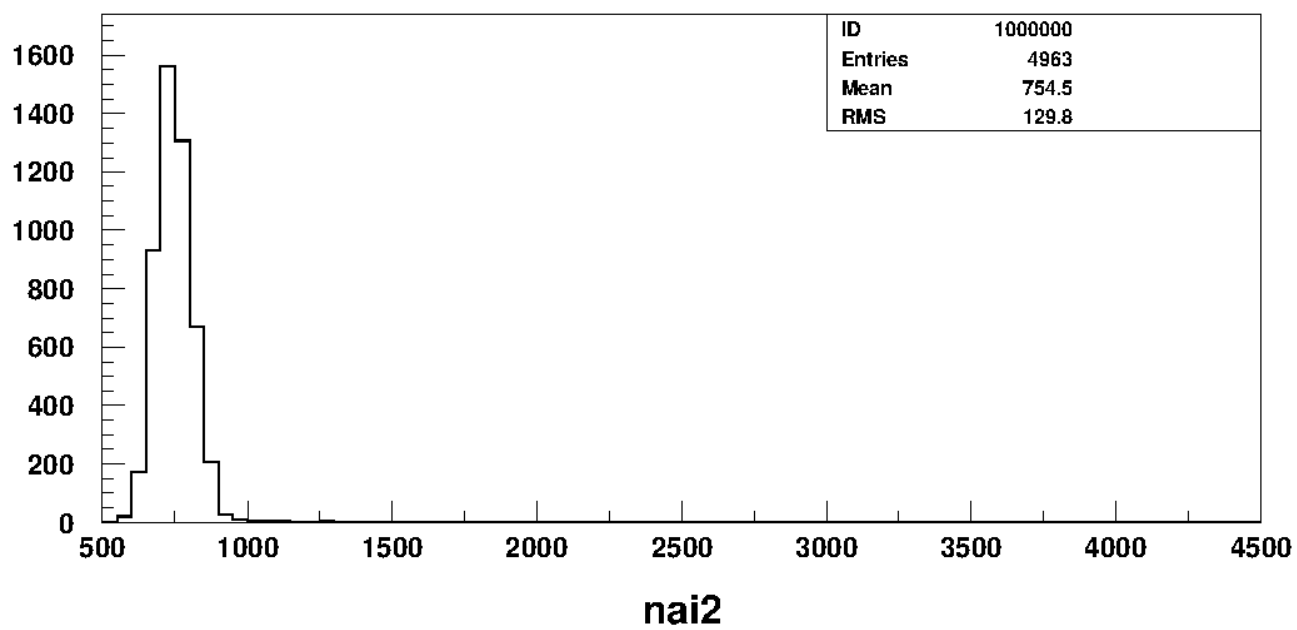
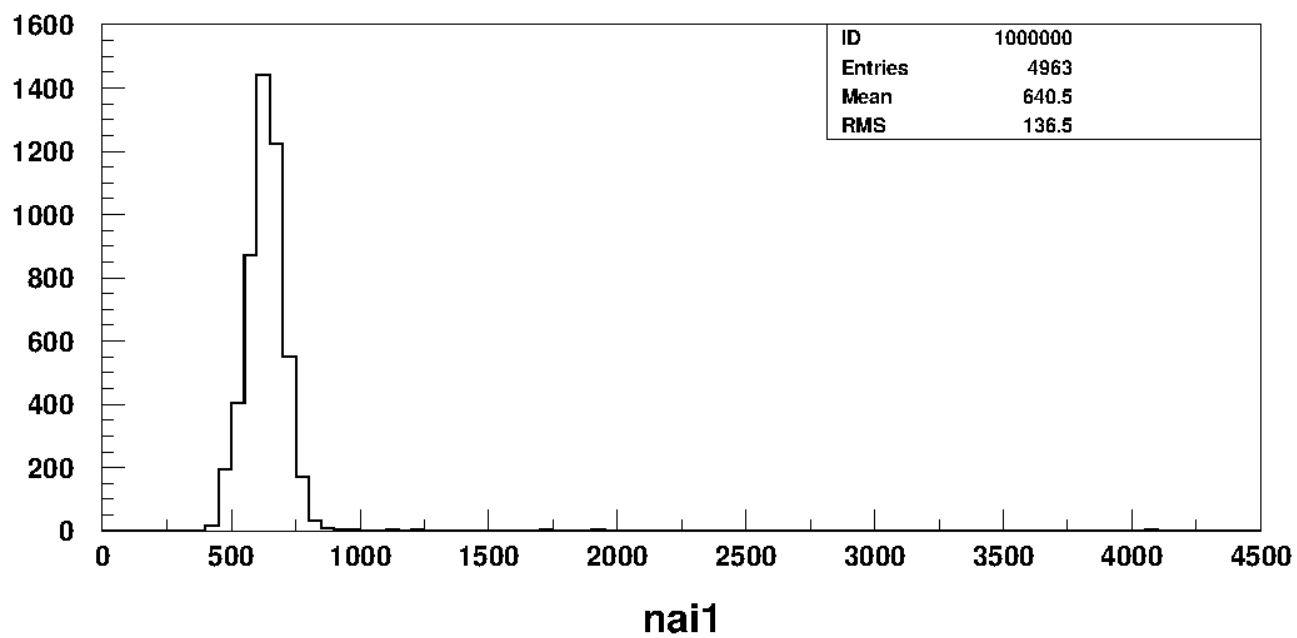
Data

我々は 0° から 180° まで 30° 置きにデータを各七時間ごと取った。この間、実験室の温度は 25°C に保たれた。また本実験前に一時間ソースなしで本実験と同じcoincidenceでバックグラウンドを測定した。結果、1時間に1eventしか存在しなかった。

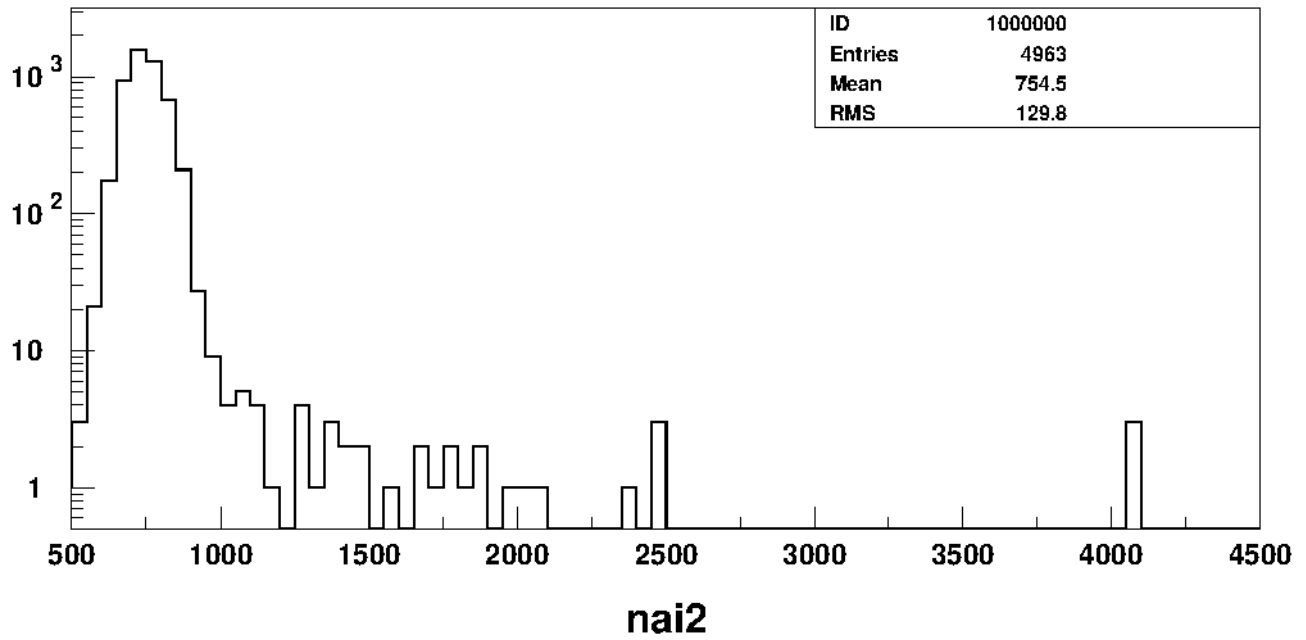
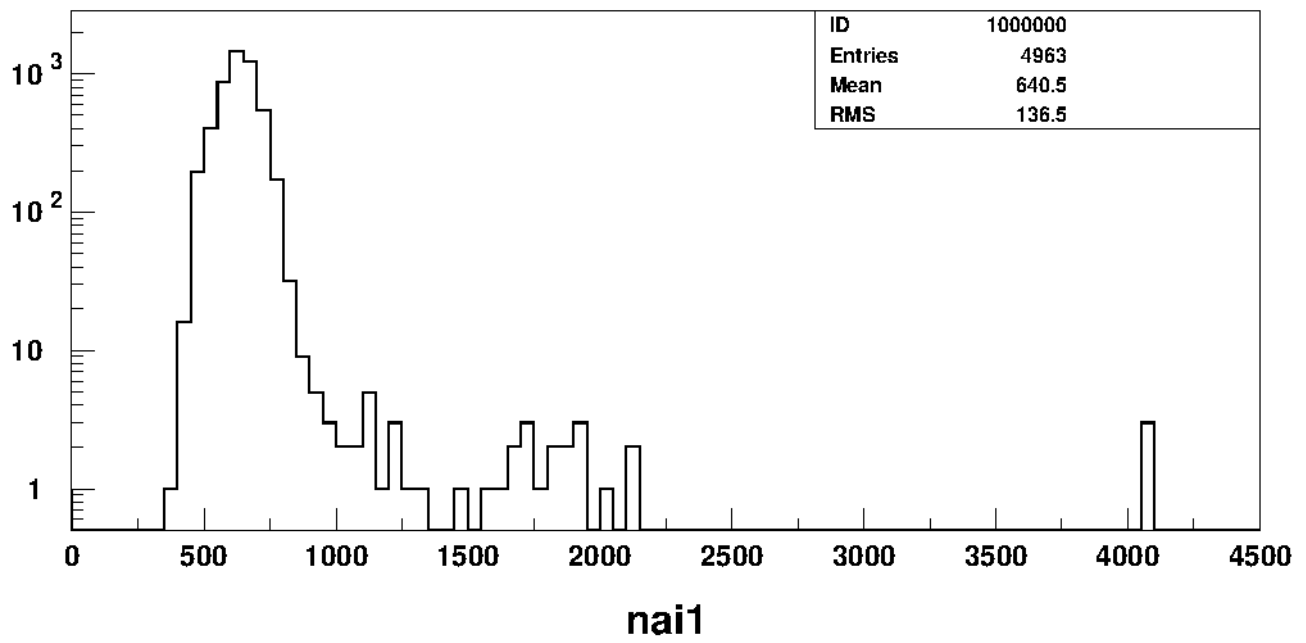
次に ϕ が 90° のときのコンプトンピーク付近の図、データの全体図、log plotをそれぞれ図4.1,4.2 4.3に示す。他の角度のときのデータもイベント数のみ異なり、形は同じとなった。



90° のときのpeak付近



90°のときの全体図



90°のときのlog plot

Analysis

散乱光子のエネルギーは散乱角 θ にしか関係しない。散乱はCompton散乱なので簡単な計算により θ とエネルギーの関係式は

$$k = \frac{k_0}{2 - \cos \theta}$$

となる。ただし k, k_0 はそれぞれ散乱後、散乱前の光子のエネルギーをあらわす。 setupの図より、 θ の

最小値は45°、最大値は135°であるがゆえに散乱光子の最小エネルギーは 188keV、最大エネルギーは 395keVとなった。

^{137}Cs を直接NaIに見せて、663keVの光電ピークとpedestalが何chになるかを 何度か測定してADCのchとエネルギーの対応を計算した結果、 188keV、395keVはそれぞれNaI①では $510\pm 10\text{ch}$ 、 $850\pm 25\text{ch}$ 、NaI②では $620\pm 10\text{ch}$ 、 $1060\pm 10\text{ch}$ に相当した。ピーク付近の拡大図を見ると、最低エネルギー以下のeventも観測されている。これはNaIの中で散乱光子が必ずしも持っている全てのエネルギーを落とすわけではないからである。NaI②に比べ、①の方が、188keV以下のevent数が多い理由はNaI②の方がthresholdのkeV相当が高いからである。

NaIに入ったにもかかわらず、落としたエネルギーがthresholdに引っかからず観測されなかったevent数の、全体のevent数に対する割合は ϕ によらず一定なので、この効果は

$$\rho(\phi) \equiv \frac{N(\phi)}{N(0)}$$

を求めるには支障にならない。

また、データの全体図を見ると395keV以上のeventも僅かながら観測されている。これは1270keVのCompton散乱である。表(4.1)に無条件でのevent数、およびNaI①が875ch以下、NaI②が1070ch以下のeventのみをeventとしてとった場合(case1)のevent数、NaI①が925ch以下NaI②が1120ch以下(case2)でのevent数、NaI①が975ch以下NaI②が1170ch以下(case3)でのevent数と ρ を記す。

カウント数

角度(°)	総event数	case1	case2	case3	$\rho(\text{case1})$	$\rho(\text{case2})$	$\rho(\text{case3})$
0	2596	2520	2531	2538	1.000	1.000	1.000
30	3147	3053	3060	3064	1.212	1.209	1.207
60	4376	4292	4300	4308	1.703	1.699	1.697
90	4963	4882	4885	4896	1.937	1.930	1.929
120	4371	4290	4300	4303	1.702	1.699	1.695
150	3189	3080	3087	3094	1.222	1.220	1.219
180	2508	2423	2426	2437	0.962	0.959	0.960

これを見ると $\rho(\phi)$ の値は ϕ が90°以外では、小数点二桁まで ϕ が90°では、 ± 0.01 の誤差でcase2を用いていいことがわかる。

以下、 $\rho(\phi)$ の値の統計誤差 $\delta\rho_{sta}$ を求める。また各角度でのevent数の統計誤差はPoisson統計で考えて $\sqrt{N(\phi)}$ である。case2を代表にevent数と使って、カウント数の統計誤差を表4.2に記した。

統計誤差

角度 (°)	event数	δN	$\delta N/N$
0	2531	50.3	0.0199
30	3060	55.3	0.0181
60	4300	65.6	0.0152
90	4885	69.9	0.0143
120	4300	65.6	0.0152
150	3087	55.6	0.0180
180	2426	49.3	0.0203

また

$$\delta\rho_{sta}(\phi) = \rho(\phi) \times \frac{\delta N(\phi)}{N(\phi)}$$

である。

ゆえに

$$\begin{aligned}\delta\rho &\equiv \delta\rho_{sta} + 0.01(\phi = \pi/2) \\ \delta\rho &\equiv \delta\rho_{sta}\end{aligned}$$

とすると $\delta\rho$ は(表(4.3)となる。

 $\delta\rho(\phi)$

角度(°)	$\rho(\phi)$	$\delta\rho(\phi)/\rho(\phi)$	$\delta\rho_{sta}(\phi)$	$\delta\rho(\phi)$
0	1.00	0.0199	0.0200	0.02
30	1.21	0.0181	0.0219	0.02
60	1.70	0.0153	0.0259	0.03
90	1.93	0.0143	0.0276	0.04
120	1.70	0.0153	0.0259	0.03
150	1.22	0.0178	0.0220	0.02
180	0.96	0.0203	0.0195	0.02

$\rho(\phi)$ のグラフは図4.4となる。曲線は $\rho(\phi)$ を（最小二乗法により）理論により予想される関数形：

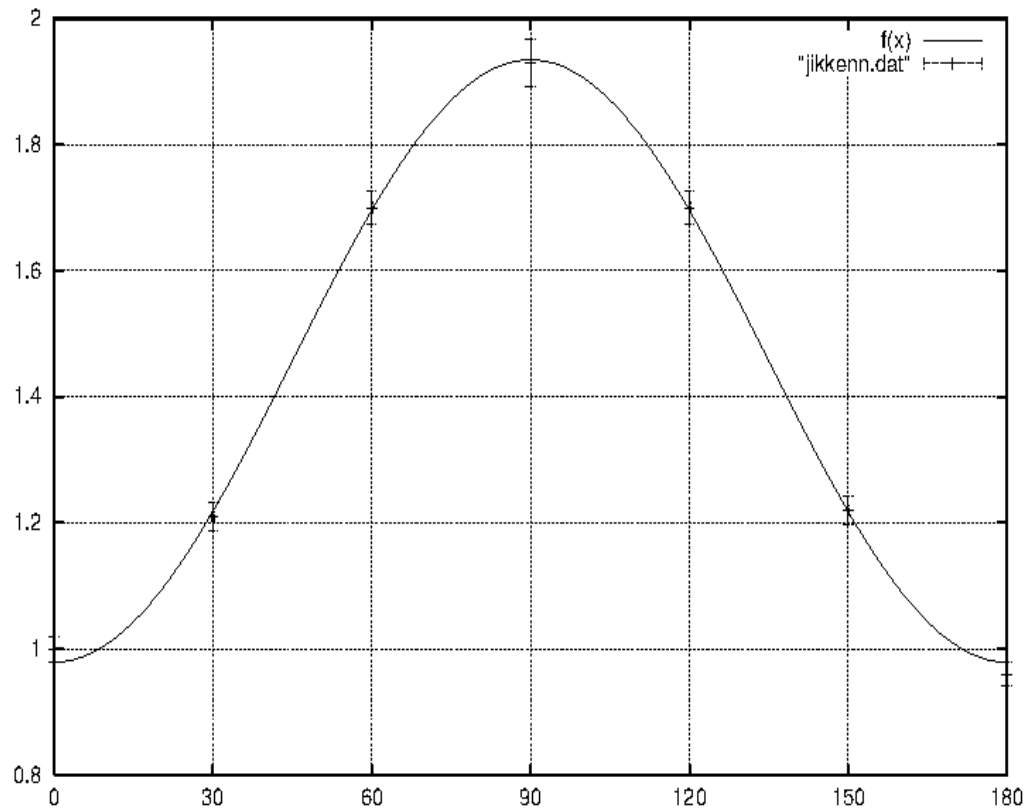
$a - b \cos(2\phi)$ でフィッティングした曲線である。なお、 ϕ の測定誤差は表3.1を参照したが、小さいた

め図4.4では見えない。

$$a = 1.45685 \pm 0.00524$$

$$b = 0.477963 \pm 0.006932$$

$\rho(\phi)$ の実験値とfitさせた関数による値に対して χ^2 検定を行うと $\chi^2 = 0.49$ となり1に比べ十分小さい。これはこのfitが確かによいものであることを示している。



ρ のグラフ

Conclusion

実験により求めた $\rho(\phi)$ を理論により予想される関数形： $a - b \cos(2\phi)$ でフィッティングした図4.4を見ると $\rho(\phi)$ が誤差の範囲で確かにフィッティングした関数上に乗ることがわかる。また

$$a = 1.45685 \pm 0.00524$$

$$b = 0.477963 \pm 0.006932$$

となった。従って、 ρ の関数形は $a - b \cos(2\phi)$ であり、 b は確かに正となる。特に、 $\rho(\phi = \pi/2)$ の

値は

$$\rho(\phi = \frac{\pi}{2}) = 1.93 \pm 0.009$$

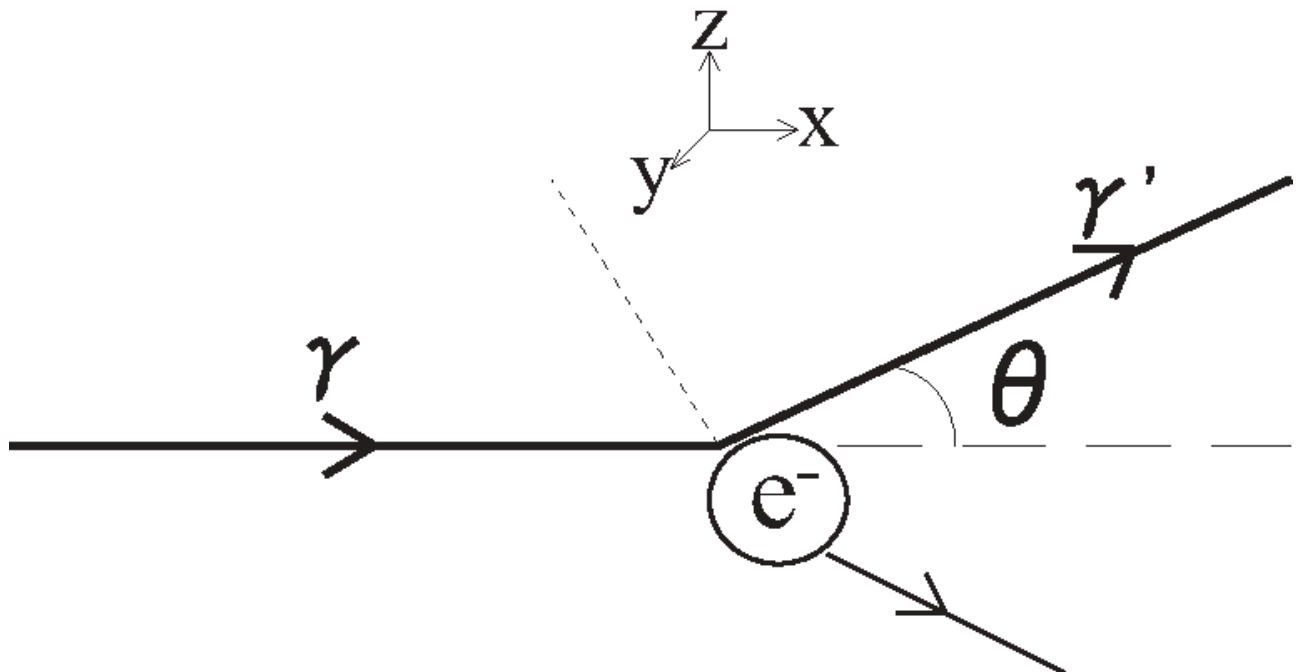
となり、1より大きいものとなった。以上より、電子-陽電子系の内部parityは-1であることが確かめられた。

さらに、 $\rho(\phi = \pi/2)$ の実験値は $\rho(\phi = \pi/2) = 1.93 \pm 0.009$ となったが、これの(立体角等の補正を行った)理論値を得るためsimulation実験をした(明細は付録Cを参照)。そこで求めた $\rho(\phi = \pi/2)$ の値は1.89となった。これをみると誤差の範囲内にsimulation実験値が入っていないが、simulation実験による理論値はこの誤差の大きさの程度では安定しないことを考えると、この結果はDirac理論の妥当性を支持するのに十分な結果である。

Acknowledgments

The authors wish to acknowledge the invaluable technical assistance of Mr T Sumida. They are also indevteved to Professor N Sasao and Mr T Nomura for stimulating and helpful discussions.

Klein-仁科の公式の散乱光の偏極方向についての平均



Compton散乱

$\mathbf{e}$ 、 $\mathbf{e}'$ をそれぞれ入射光子、散乱光子の偏極方向の単位ベクトルとすると、(2.4)において

$$\cos \Theta = \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}'$$

が成り立つ。入射光子の伝播ベクトルと散乱面（図の描かれた紙面）内で直交する直線（図のz軸）と $\mathbf{e}$ のなす角を ψ とすると

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \psi \\ \cos \psi \end{pmatrix}$$

と表わせる。また、散乱光子の伝播ベクトルと散乱面内で直交する直線（図の点線）と $\mathbf{e}'$ のなす角を ψ' とすると、 $\mathbf{e}'$ は $(0, \sin \psi', \cos \psi')$ なるベクトルをy軸のまわりに θ （ θ は散乱角）だけ回転したものであるから

$$\mathbf{e}' = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \psi' \\ \cos \psi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \psi' \\ \sin \psi' \\ \cos \theta \cos \psi' \end{pmatrix}$$

と表わせる。従って

$$\begin{aligned} \cos \Theta &= \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}' \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \psi \\ \cos \psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \psi' \\ \sin \psi' \\ \cos \theta \cos \psi' \end{pmatrix} \\ &= \sin \psi \sin \psi' + \cos \theta \cos \psi \cos \psi' \end{aligned}$$

なので

$$\cos^2 \Theta = \sin^2 \psi \sin^2 \psi' + \cos^2 \theta \cos^2 \psi \cos^2 \psi' + \frac{1}{2} \cos \theta \sin 2\psi \sin 2\psi'$$

が成り立つ。これを散乱光子の偏極方向について、つまり ψ' について平均をすると

$$\cos^2 \Theta = \frac{1}{2} \sin^2 \psi + \frac{1}{2} \cos^2 \theta \cos^2 \psi$$

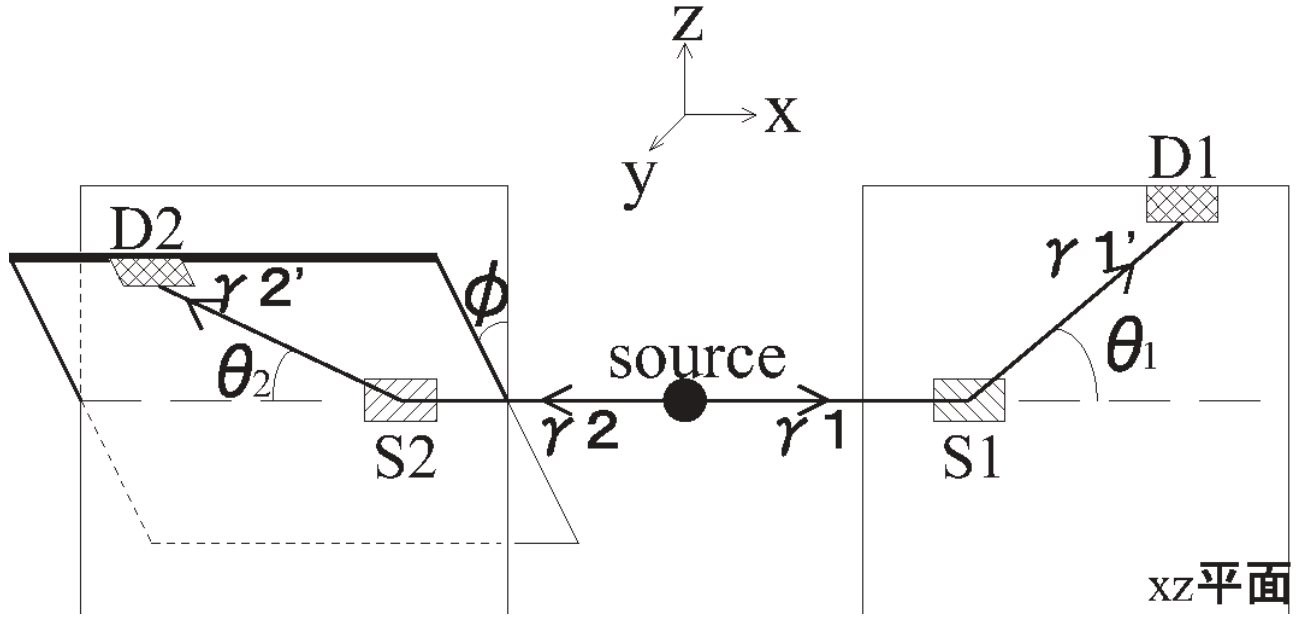
となる。従って、これを(2.4)に代入すると

$$-2 + 4 \cos^2 \Theta = -2 + 2(\sin^2 \psi + \cos^2 \theta \cos^2 \psi) = -2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi$$

となるから(2.5)が得られる。

ρ の導出

図B.1は二つの散乱角を別々に設定し、図2.1をより一般的にした原理図である。



実験の原理図 2

sourceの近傍で作られた光子は全くランダムな方向に偏極していると見なしてよいから、散乱体 $S1$ に入射する光子 $\gamma1$ のうち図の y 軸方向に偏極しているものと z 軸方向に偏極しているものの数はともに単位時間、単位面積当たり n_1 個とすることができる。このとき、図にあるように xz 平面にある検出器 $D1$ に入る散乱光子 $\gamma1'$ のうち、散乱前に y 軸方向に偏極していた光子の数を N_{1y} 、 z 軸方向に偏極していた光子の数を N_{1z} とすると

$$N_{1y} \propto n_1 \frac{d\sigma}{d\Omega}(\psi = \frac{\pi}{2}, \theta = \theta_1)$$

$$N_{1z} \propto n_1 \frac{d\sigma}{d\Omega}(\psi = 0, \theta = \theta_1)$$

が成り立つ。ただし、微分断面積は散乱光子の偏極方向について平均をとったKlein-仁科の公式(2.5)を使う。また、 ψ は z 軸から測った入射光子の偏極方向の角（つまり、散乱面となす角）、 θ はCompton散乱の散乱角である。

一方、散乱体 $S2$ に入射する光子 $\gamma2$ は二光子系の波動関数からわかるように $\gamma1$ の偏極方向に対し垂直な方向に偏極する。つまり、 $\gamma1$ が y 軸方向に偏極しているなら $\gamma2$ は z 軸方向に、 $\gamma1$ が z 軸方向に偏極しているなら $\gamma2$ は y 軸方向にそれぞれ偏極する。従って、 $\gamma2$ のうちで $\gamma1'$ が $D1$ に入るのと同時に $D2$ に入るような散乱光子 $\gamma2'$ を生じる可能性のある入射光子の数は y 軸方向に偏極しているものが N_{1z} に、 z 軸方向に偏極しているものが N_{1y} に比例する。これらのうち、図にあるように xz 平面に対して角度 ϕ だけ傾いた平面にある検出器 $D2$ に入るのは、散乱前に y 軸方向に偏極していた光子の数 N_{2y} に対して

$$N_{2y} \propto N_{1z} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\psi = \frac{\pi}{2} - \phi, \theta = \theta_2)$$

$$\propto n_1 \frac{d\sigma}{d\Omega}(\psi = 0, \theta = \theta_1) \frac{d\sigma}{d\Omega}(\psi = \frac{\pi}{2} - \phi, \theta = \theta_2)$$

が成り立ち、z軸方向に偏極していた光子の数 N_{2z} に対して

$$\begin{aligned} N_{2z} &\propto N_{1y} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\psi = -\phi, \theta = \theta_2) \\ &\propto n_1 \frac{d\sigma}{d\Omega}(\psi = \frac{\pi}{2}, \theta = \theta_1) \frac{d\sigma}{d\Omega}(\psi = -\phi, \theta = \theta_2) \end{aligned}$$

が成り立つ。以上より $D1$ 、 $D2$ に光子が同時に入るevent数 $N(\phi, \theta_1, \theta_2)$ は

$$\begin{aligned} N(\phi, \theta_1, \theta_2) &= N_{2y} + N_{2z} \\ &\propto n_1 \left\{ \frac{1}{2} r_e^2 \left(\frac{k_1 k_2}{k_0^2} \right) \right\}^2 \left\{ \left(\gamma_1 - 2 \sin^2 \theta_1 \right) \left(\gamma_2 - 2 \sin^2 \theta_2 \sin^2 \phi \right) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_1 \left(\gamma_2 - 2 \sin^2 \theta_2 \cos^2 \phi \right) \right\} \\ &\propto \frac{n_1}{2} \left\{ r_e^2 \left(\frac{k_1 k_2}{k_0^2} \right) \right\}^2 \left(\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_1 \sin^2 \theta_2 - \gamma_2 \sin^2 \theta_1 \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \sin^2 \phi \right) \end{aligned}$$

を満たす。ただし

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{k_0}{k_1} + \frac{k_1}{k_0} = 2 - \cos \theta_1 + \frac{1}{2 - \cos \theta_1} \\ \gamma_2 &= \frac{k_0}{k_2} + \frac{k_2}{k_0} = 2 - \cos \theta_2 + \frac{1}{2 - \cos \theta_2} \end{aligned}$$

である。[7](#)ここで、 $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ とすると、 $k_1 = k_2 = k$ 、 $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ となるので

$$N(\phi, \theta) \propto (\gamma - \sin^2 \theta)^2 - \sin^4 \theta \cos 2\phi$$

が得られる。従って、 ρ は

$$\begin{aligned} \rho(\phi, \theta) &= \frac{N(\phi, \theta)}{N(\phi = 0, \theta)} \\ &= \frac{(\gamma - \sin^2 \theta)^2 - \sin^4 \theta \cos 2\phi}{(\gamma - \sin^2 \theta)^2 - \sin^4 \theta} \\ &= 1 + \frac{(1 - \cos 2\phi) \sin^4 \theta}{\gamma^2 - 2\gamma \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

となり、(2.7)が得られる。

Setupを考慮した ρ の計算

付録 B より、光子 γ_1 が入射光に対して θ_1 の角度で、光子 γ_2 は θ_2 で散乱され、それぞれの散乱光の入射光に垂直な面においてなす角が ϕ である相対確率は

$$dP = \frac{k_1^2 k_2^2}{k_0^4} (\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_1 \sin^2 \theta_2 - \gamma_2 \sin^2 \theta_1 + 2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \sin^2 \phi) d\Omega_1 d\Omega_2 \quad \text{\textcolor{red}{label}eq : kn}$$

$$\gamma_i = \frac{k_i}{k_0} + \frac{k_0}{k_i} \quad (i = 1, 2)$$

$$k_i = \frac{k_0}{2 - \cos \theta_i} \quad (i = 1, 2)$$

となることがわかる。しかし、実際の実験においては NaI の立体角や散乱場所などのため理想的な状態と異なってくるのでそれらを補正した理論値を求めてやる必要がある。

そのために、以下のようなアルゴリズムを組んで setup の大きさ、位置関係を元に計算した。

1. source の中心から全立体角にランダムに 2γ を出す。
2. それぞれの光子を直進させて、散乱体に到達する点を求める。この時、光子が散乱体に入らない時は 1 に戻る。
3. 散乱体を横切る長さに比例して散乱するかどうかをランダムに決め、散乱する場合はその経路上どこで散乱するかを等確率に求める。これをそれぞれについて行う。この場合も（片方でも）散乱されなかったものについては 1 に戻る。
4. それぞれの散乱地点において、そこから全立体角にランダムに散乱させる。
5. 光子 γ_1 が NaI の場所にくれば次へ、そうでなければ 1 に戻る。
6. もう一方には $\phi = 0, \pi/2$ にそれぞれ NaI があるとし、 $\phi = 0$ の方に入ればその時の式（[eq:kn](#)）の値を n_{para} に加え、 $\phi = \pi/2$ の方に入った時は式（[eq:kn](#)）の値を n_{perpen} に加える。
7. 1～6 の操作を $\rho = \frac{n_{perpen}}{n_{para}}$ の値が安定するほどまでに何度も何度も繰り返す。

このアルゴリズムを見ればわかるように、この計算においては主に以下の 3 つの仮定が用いられている。

- positronium は source の中心で全運動量 0 の状態から崩壊する。
- 散乱体において Compton 散乱する確率は経路上等確率とし、1 回散乱までを考える（Compton 散乱のみ考えたとき散乱体を横切る長さは平均自由行程より十分大きい）。
- NaI はある範囲内に来た光子を全て count する（散乱体の中心位置から出た ^{22}Na の 511keV を検出できる範囲を採用）。

これらの計算より我々の実験に対する ρ の値は

$$\rho = 1.89$$

となった。

2 西島 和彦 著「場の理論」(紀伊国屋書店) 日置 善郎 著「場の量子論-摂動計算の基礎-」(吉岡書店)

-
1. 詳しくは場の量子論の教科書(例えば、西島和彦:「場の理論」(紀伊国屋書店)176ページ)を参照。 [←](#)
 2. 電子-陽電子系(一般には、Fermi粒子-反Fermi粒子系)のC-parityは $C = (-1)^{L+S}$ で与えられる(ただし、 L は軌道角運動量、 S はspin角運動量の和)が、para-positroniumは $L = 0$ かつ $S = 0$ なので $C = 1$ 、ortho-positroniumは $L = 0$ かつ $S = 1$ なので $C = -1$ となる。一方、1個の光子のC-parityは $C = -1$ なので、C-parityの選択則により、para-positroniumは偶数個の光子に、ortho-positroniumは奇数個の光子に崩壊する。また、運動量の保存則により1個の光子への崩壊は禁止される。さらに、詳しい摂動計算を実行すると、4個以上の光子への崩壊はほとんど起こらないことがわかる。 [←](#)
 3. これはKlein-仁科の公式と呼ばれる。この詳しい導出は場の量子論の教科書(例えば、日置善郎:「場の量子論-摂動計算の基礎-」(吉岡書店)108ページ)を参照。 [←](#)
 4. この計算は付録Aを参照。 [←](#)
 5. 付録Bを参照。 [←](#)
 6. 付録Cを参照。 [←](#)
 7. Compton散乱において散乱角を θ とすると、散乱の前後の光子の波数 k_0 と k の間に $k = \frac{k_0}{1+\varepsilon(1-\cos\theta)}$ という関係がある。ただし、 $\varepsilon = \frac{\hbar k_0}{m_e c}$ である。今の場合、エネルギー保存則により $\varepsilon = 1$ なので、 $\frac{k_0}{k} = 2 - \cos\theta$ となる。 [←](#)